WYKŁAD 4

ZASADA ZMIENNOŚCI PĘDU I OGÓLNE RÓWNANIA RUCHU PŁYNU.
ZNACZENIE ZASADY ZMIENNOŚCI KRĘTU.

RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU PŁYNU

Wiemy już, że Zasada Zmienności Pędu jest szczególnym przypadkiem ogólnej zasady zachowania/zmienności, w której $h = \boldsymbol{v}$ (vide Wykład nr 3). Ponieważ „źródłem” zmienności pędu w czasie ruchu są działające na porcję płynu siły zewnętrzne, mamy następującą równość

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho \boldsymbol{v}\, dV - \left(-\int_{\partial\Omega} (\rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, dS \right) = \boldsymbol{F}_S + \boldsymbol{F}_V$$

Podobnie jak w przypadku zasady zachowania masy, możemy wejść z różniczkowaniem po czasie pod znak całki. PO podstawieniu wyrażeń całkowych na siły otrzymujemy równość postaci

$$\int_{\Omega} \tfrac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v})\, dV + \int_{\partial\Omega} (\rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, dS + \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{f}\, dV$$

W dalszej części rozważań (Wykład nr 7) pokażemy, że wektor jednostkowej siły powierzchniowej (naprężeń) może być przedstawiony z postaci iloczynu $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{n}$.

Ściślej – wektor naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ otrzymywany w wyniku zadziałania tensorem naprężeń $\boldsymbol{\Xi}$ na jednostkowy wektor (wersor) $\boldsymbol{n}$ prostopadły do powierzchni brzegowej.

W przypadku najprostszego modelu płynu (płyn Eulera) wektor naprężeń ma tylko składową normalną. Oznacza to, że płyn Eulera jest niezdolny do przenoszenia naprężeń stycznych (jest nielepki). Wówczas, wyrażenie na wektor naprężeń przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{n}$$

Symbol p oznacza ciśnienie w płynie. Odpowiadający temu modelowi tensor naprężeń ma wyjątkowo prostą formę, a mianowicie $\boldsymbol{\Xi} = -p\boldsymbol{I}$, gdzie $\boldsymbol{I}$ to tensor jednostkowy.

Naszym najbliższym celem jest wyprowadzenie ogólnego równania różniczkowego ruchu płynu. Procedura przejścia od opisu całkowego do różniczkowego polega – jak zwykle – na sprowadzeniu wszystkich całek powierzchniowych do równoważnych całek objętościowych, a następie wykorzystaniu argumentów dowolności wyboru obszaru całkowania Ω i ciągłości całkowanych wielkości.

Odpowiednie operacje są tym razem bardziej złożone. Zacznijmy od przekształcenia całki powierzchniowej opisującej strumień pędu przez brzeg obszaru:

$$\int_{\partial\Omega} (\rho\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = \boldsymbol{e}_i \int_{\partial\Omega} \rho\upsilon_i\upsilon_j n_j\,dS \underset{GGO}{=} \boldsymbol{e}_i \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\underbrace{\rho\upsilon_i\upsilon_j}_{(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})_{ij}}\Big)dV = \int_{\Omega} \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})\,dV$$

Otrzymaliśmy całkę objętościową z pola wektorowego, które jest **dywergencją pola tensorowego strumienia pędu** $\boldsymbol{\Pi} = \rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}$. Symbol $\otimes$ oznacza tu mnożenie tensorowe pary wektorów, którego wynikiem jest specjalny tensor zwany diadą.

Przekształcimy teraz całkę wyrażająca siłę powierzchniową

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{n}\, dS = \boldsymbol{e}_i \int_{\partial\Omega} \Xi_{ij} n_j\, dS \underset{GGO}{=} \boldsymbol{e}_i \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \Xi_{ij}\, dV \equiv \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\Xi}\, dV$$

Otrzymaliśmy całkę objętościową z **dywergencji tensora naprężeń** $\boldsymbol{\Xi}$. W szczególności, w przypadku płynu idealnego (nielepkiego) wyrażenie na siłę powierzchniową przekształcane jest następująco

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, dS = \int_{\partial\Omega} (-p\boldsymbol{I})\boldsymbol{n}\, dS = -\boldsymbol{e}_i \int_{\partial\Omega} p\,\delta_{ij} n_j\, dS \underset{GGO}{=} -\boldsymbol{e}_i \int_{\Omega} \underbrace{\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} p}_{\frac{\partial}{\partial x_i} p}\, dV \equiv -\int_{\Omega} \nabla p\, dV$$

Wstawienie obliczonych całek objętościowych do równości wyrażającej zasadę zmienności pędu daje (po zapisaniu w formie pojedynczej całki)

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Xi}) - \rho \boldsymbol{f} \right\} dV = \boldsymbol{0}$$

Z dowolności obszaru i ciągłości całkowanego wyrażenia wynika, że w każdym punkcie przepływu spełnione jest równanie różniczkowe

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Xi}) = \rho \boldsymbol{f}}$$

Otrzymaliśmy **różniczkowe r-nie ruchu płynu**!

Dla płynu idealnego $\boldsymbol{\Xi} = -p\boldsymbol{I}$ i RRR przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + p\boldsymbol{I}) = \rho \boldsymbol{f}$$

Równanie ruchu można przedstawić w innych równoważnych formach (ta powyżej to tzw. **postać zachowawcza**). Rozwijając składnik z dywergencją tensorową otrzymamy postać uznawaną za standardową. Oto odpowiedni rachunek

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{e}_i \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \upsilon_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \upsilon_i \upsilon_j) \right] =$$

$$= \boldsymbol{e}_i \left[\boxed{\upsilon_i \frac{\partial}{\partial t} \rho} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \upsilon_i + \boxed{\upsilon_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \upsilon_j)} + \rho \upsilon_j \frac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i \right] =$$

$$= \boldsymbol{v} \cdot [\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v})}_{0!!!(r\text{–}nie\ zach.\ masy)}] + \rho [\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}}_{=\boldsymbol{a}\ -\ przyspieszenie!}] = \rho \boldsymbol{a}$$

Ogólne równanie ruchu płynu możemy teraz zapisać następująco

$$\boxed{\rho \boldsymbol{a} \equiv \rho[\tfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] = \nabla\cdot\boldsymbol{\Xi} + \rho\boldsymbol{f}}$$

W szczególności, standardowa postać równania ruchu dla płynu idealnego – zwana **<u>równaniem Eulera</u>** – to

$$\rho[\tfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] = -\nabla p + \rho\boldsymbol{f}$$

Forma kinematyczna (podzielona przez gęstość) …

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\tfrac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$$

W dalszej części rozważań rozważymy również płyn lepki zwany też **newtonowskim** ….

ZASADA ZMIENNOŚCI KRĘTU. SYMETRIA TENSORA NAPRĘŻEŃ.

Kręt (moment pędu) płynu znajdującego się w danej chwili w obszarze (kontrolnym) Ω wyraża się całką objętościową

$$\boldsymbol{K} = \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} \, dV$$

Zgodnie z ogólną regułą, tempo zmian wielkości $\boldsymbol{K}$ opisane jest następującym wzorem

$$\left.\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}\right|_{produkcja} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, dS$$

i Zasada Zmienności Krętu

$$\left.\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}\right|_{produkcja} = \boldsymbol{M}_S + \boldsymbol{M}_V$$

przyjmuje formę

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v} \, dV + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{n} \, dS + \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{f} \, dV$$

Wykorzystując niezmienność obszaru w czasie, wprowadzimy różniczkowanie pod znak całki …

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{v}\,dV = \int_{\Omega} \boldsymbol{x}\times\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})\,dV$$

Dalej, postąpimy standardowo przekształcając całki powierzchniowe i objętościowe. Zauważmy, że całka powierzchniowa po lewej stronie równości całkowej może być zapisana w postaci

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{x}\times\rho\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x}\times[(\underbrace{\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}}_{tensor})\boldsymbol{n}]\,dS$$

Wobec tego, obie całki powierzchniowe są szczególnymi przypadkami całki postaci

$$\boldsymbol{J} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}\,dS \;\;,\quad \boldsymbol{A} - tensor$$

Transformacja powyższej całki do całki objętościowej stanowi dobrą okazję do przećwiczenia rachunku indeksowego ….

$$\boldsymbol{J} = J_i \boldsymbol{e}_i \equiv \boldsymbol{e}_i \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{n})_i \, dS = \boldsymbol{e}_i \int_{\partial\Omega} \in_{ijk} x_j \underbrace{(a_{km} n_m)}_{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n})_k} dS \underset{GGO}{=} \boldsymbol{e}_i \int_{\Omega} \in_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_m} (x_j a_{km}) dV =$$

$$= \boldsymbol{e}_i \int_{\Omega} \in_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_m}}_{\delta_{jm}} a_{km} dV + \boldsymbol{e}_i \int_{\Omega} \in_{ijk} x_j \underbrace{\frac{\partial a_{km}}{\partial x_m}}_{(\nabla\cdot\boldsymbol{A})_k} dV = \boldsymbol{e}_i \int_{\Omega} \in_{ijk} a_{kj} dV + \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, dV \right)_i \boldsymbol{e}_i =$$

$$= \boldsymbol{e}_1 \int_{\Omega} (a_{32} - a_{23}) dV + \boldsymbol{e}_2 \int_{\Omega} (a_{13} - a_{31}) dV + \boldsymbol{e}_3 \int_{\Omega} (a_{21} - a_{12}) dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{A} \, dV$$

Zauważmy, że jeśli tensor $\boldsymbol{A}$ jest **symetryczny** (tj. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$), to trzy pierwsze składniki znikają.

Tak właśnie jest w przypadku pierwszej z naszych całek powierzchniowych, bowiem

$$\boldsymbol{A} = \rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = \rho v_i v_j$$

skąd $a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad i, j = 1,2,3.$

Zatem

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) \boldsymbol{n} \, dS = \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) dV$$

W drugiej całce powierzchniowej mamy wprost $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Xi}$, a więc

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{n}\, dS = \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\Xi}\, dV + \boldsymbol{e}_1 \int_{\Omega} (\Xi_{32} - \Xi_{23}) dV + \boldsymbol{e}_2 \int_{\Omega} (\Xi_{13} - \Xi_{31}) dV +$$

$$+ \boldsymbol{e}_3 \int_{\Omega} (\Xi_{21} - \Xi_{12}) dV$$

Podstawienie otrzymanych wyrażeń do całkowej równości wyrażającej ZZK daje równość postaci

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times [\tfrac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Xi}) - \rho \boldsymbol{f}] dV + \boldsymbol{e}_1 \int_{\Omega} (\Xi_{32} - \Xi_{23}) dV +$$

$$+ \boldsymbol{e}_2 \int_{\Omega} (\Xi_{13} - \Xi_{31}) dV + \boldsymbol{e}_3 \int_{\Omega} (\Xi_{21} - \Xi_{12}) dV = 0$$

Zgodnie z równaniem ruchu $\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Xi}) - \rho \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$

Ponieważ Ω jest dowolny, wnioskujemy, że

$$\Xi_{32} = \Xi_{23}\ ,\ \Xi_{12} = \Xi_{21} \text{ i } \Xi_{13} = \Xi_{31}$$

tj. **w każdym punkcie przepływu tensor naprężeń jest symetryczny, czyli** $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Xi}^T$ **!**

PODSUMUJMY ROZWAŻANIA …

Pokazaliśmy, że jeżeli tensor naprężeń jest symetryczny i spełnione jest r-nie Zasady Zmienności Pędu, to Zasada Zmienności Pędu jest automatycznie spełniona. Innymi słowy: jeżeli model matematyczny płynu skonstruowany jest w sposób gwarantujący symetrię tensora naprężeń to Zasada Zmienności Krętu nie jest potrzebna do opisu jego ruchu, bowiem wynika ona z Zasady Zmienności Pędu.

UWAGA:

1. Z powyższego nie wynika bynajmniej, że ZZK jest z mechanice płynów bezużyteczna. W istocie, ZZK stosowana jest do np. do obliczania momentu działającego na płyn poruszający się ruchem obrotowym i znajduje powszechne wykorzystanie w teorii maszyn wirnikowych (pompy, sprężarki, turbiny).
2. Istnieją modele płynu w których wyrażenie na kręt zawiera dodatkowy składnik opisujący tzw. kręt mikropolarny. Wówczas tensor naprężeń nie musi być symetryczny, a do pełnego opisu ruchu ośrodka mikropolarnego potrzebne są dodatkowe równania wyprowadzane z ZZK.